جدول التكاملات الأساسية

1. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c : x \neq 0$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c : a > 0 , a \neq 1$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \int (1 + tg^2 x)dx = tgx + c$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
9. $\int \csc^2 x\,dx = \int (1 + ctg^2 x)dx = -ctgx + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c, x \neq k\pi$
11. $\int \sec x\, tgx\,dx = \sec x + c, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
12. $\int \csc x\, ctgx\,dx = -\csc x + c, x \neq \pi k$
13. $\int shx\,dx = chx + c$
14. $\int chx\,dx = shx + c$
15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = \int (cth^2 x - 1)dx = -cthx + c : x \neq 0$
16. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = \int (1 - th^2 x)dx = thx + c$
17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} argth\frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$
18. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + c$
19. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c : a \neq 0$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = argsh\frac{x}{a} + c$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c = -\arccos\frac{x}{a} + c : |x| < |a|$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \mp a^2}\right| + c : |x| > |a|$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = argch\frac{x}{a} + c$
24. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + tgx| + c = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$
25. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + ctgx| + c$

$= \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$

26. $\int \frac{dx}{1 - x^2} = argthx + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$
27. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + c = -arcctgx + c$
28. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c : a \neq 0$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = argshx + c$
30. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c : |x| < 1$
31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \mp 1}\right| + c : |x| > 1$
32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = argchx + c : |x| > 1$

طرق حساب التكاملات [illegible]

☒ **التكاملة بالتعويض:**

$$\int f(u(x))\dot{u}(x)dx = \int f(t)dt|_{t=u(x)}$$

- $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$

٣. إذا كانت الدالة المستكملة لاتتغير إشارتها إذا استبدلنا كل -

$(\sin x) \to (-\sin x)$ وكل $(\cos x) \to (-\cos x)$ أي

(زوجية بالمتغيرين معا)

نستخدم التبديل $t = \tan x$

B. $\int \cos^m x \sin^n x dx$

حيث m,n أعداد صحيحة غير سالبة نميز الحالات التالية:

١. العدد n فردي في هذه الحالة نضع $t = \cos x$

نستخدم العلاقة: $\sin^2 x = 1 - t^2$

٢. العدد m فردي في هذه الحالة نضع $t = \sin x$

نستخدم العلاقة: $\cos^2 x = 1 - t^2$

٣. إذا كان العددان m,n زوجيان في هذه الحالة نستخدم دساتير ضعف الزاوية

- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

أو نستخدم التبديل $t = \tan x$

٤. إذا كان العددان m,n فرديان في هذه الحالة تصلح جميع التبديلات السابقة

C. $I_1 = \int \cos\alpha x \cos\beta x dx$

D. $I_2 = \int \sin\alpha x \sin\beta x dx$

E. $I_3 = \int \sin\alpha x \cos\beta x dx$

F. $I_4 = \int \cos\alpha x \sin\beta x dx$

في التكاملات (C,D,E) نستخدم دساتير التحويل من جداء إلى مجموع أي:

a. $I_1 = \frac{1}{2}\int [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x] dx$

$= \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + c$

b. $I_2 = \frac{1}{2}\int [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] dx$

$= \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} - \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + c$

c. $I_3 = \frac{1}{2}\int [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x] dx$

$= -\left[\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + \frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)}\right] + c$

d. $I_4 = \frac{1}{2}\int [\sin(\alpha + \beta)x - \sin(\alpha - \beta)x] dx$

$= -\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + c$

G. $\int \tan^n x dx$

H. $\int ctan^n x dx$

- في التكامل(F) نستخدم التبديل $t = \tan x$

فيكون $x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2+1}$

أو نستخدم العلاقة $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

- في التكامل(G) نستخدم التبديل $t = ctan x$

فيكون $x = arcctan t \Rightarrow dx = \frac{-dt}{t^2+1}$

أو نستخدم العلاقة $1 + ctan^2 x = \csc^2 x$

I. $I_n = \int \sec^n x dx$

J. $I_n = \int csc^n x dx$

- في التكامل (H) نكامل بالتجزئة فنضع :

$$dv = sec^2 x dx = d(tanx)$$

$$u = sec^{n-2} x$$

$$I_n = \int sec^{n-2} x d(tanx)$$

$$= sec^{n-2} x tanx - (n-2) \int sec^{n-2} x tan^2 x dx$$

بالمتابعة نتوصل إلى دستور لعلاقة تراجعية لحساب هذا النوع من التكاملات بدلالة تكاملات مماثلة برتبة أقل:

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n-1}[sec^{n-2} x tanx + (n-2) I_{n-2}] + c}$$

[redacted]

إذا كان n زوجيا يمكننا اتباع مايلي:

$$I_n = \int sec^n x dx = \int sec^{2r} x dx$$

$$= \int (sec^2 x)^{r-1} sec^2 x dx$$

$$= \int (tan^2 x + 1)^{r-1} dtanx$$

وهذا تكامل لكثير حدود في (tanx)

- في التكامل (I) نكامل بالتجزئة فنضع :

$$dv = -csc^2 x dx = d(ctanx)$$

$$u = sec^{n-2} x$$

$$I_n = \int csc^{n-2} x d(ctanx)$$

$$= csc^{n-2} x ctanx + (n-2) \int csc^{n-2} x ctan^2 x dx$$

بالمتابعة نتوصل إلى دستور لعلاقة تراجعية لحساب هذا النوع من التكاملات بدلالة تكاملات مماثلة برتبة أقل:

$$\boxed{I_n = \frac{1}{3-n}[sec^{n-2} x ctanx - (n-2) I_{n-2}] + c}$$

[redacted]

إذا كان n زوجيا يمكننا اتباع مايلي:

$$I_n = \int csc^n x dx = \int csc^{2r} x dx$$

$$= \int (csc^2 x)^{r-1} csc^2 x dx$$

$$= \int (ctan^2 x + 1)^{r-1} dtanx$$

: [redacted] ✓

1. $d(sec^n x) = n sec^n x tanx dx$
2. $d(csc^n x) = -n csc^n x tanx dx$
3. $sec^2 x = 1 + tan^2 x$
4. $csc^2 x = 1 + ctan^2 x$

○. تكامل $csc^n x$ هو نفس تكامل $sec^n x$ مع إجراء تغير بالمتحول (x) أي:

$$\int csc^n x dx = \int \frac{dx}{sin^n x} = \int \frac{d(x - \frac{\pi}{2})}{cos^n(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \int \frac{du}{cos^n u} = \int sec^n u du$$

J. $I_n = \int tan^n x secc^m x dx$

نميز ثلاث حالات:

١. n فردي نتبع مايلي:

$$\int tan^{2r-1} x \, sec^m x dx$$

$$= \int (tan^2x)^r sec^{m-1}xtgxdx$$

$$= \int (sec^2x-1)^r sec^{m-1}xd(secx)$$

٢. m زوجي نتبع ما يلي:

$$\int tan^n x sec^{2r} xdx =$$

$$\int tan^n x (sec^2x)^{r-1} sec^2 x\, dx =$$

$$\int tan^n x(1+tag^2)^{r-1} d(tanx) =$$

٣. n زوجي و m فردي نتبع ما يلي:

$$\int tan^{2r} x sec^m xdx =$$

$$\int (sec^2x-1)^r sec^m xd(x)$$

ومن ثم نستخدم الدستور التدريجي (تكامل بالتجزئة).

[illegible]

كل ما ينطبق على الدوال المثلثية ينطبق على الدوال المثلثية القطعية مع مراعاة القوانين التالية:

1. $sh^2x = \frac{1}{2}(1+ch2x)$
2. $ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x-1)$
3. $ch^2x - sh^2x=1$
4. $\frac{1}{ch^2x}=1-th^2x$
5. $\frac{1}{sh^2x}=cth^2x-1$
6. $sh\, x = \frac{2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}}{ch^2\frac{x}{2}-sh^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,th\frac{x}{2}}{1-th^2\frac{x}{2}}$
7. $\cos x = \frac{ch^2\frac{x}{2}+sh^2\frac{x}{2}}{ch^2\frac{x}{2}-sh^2\frac{x}{2}} = \frac{1+th^2\frac{x}{2}}{1-th^2\frac{x}{2}}$
8. $d(thx) = \frac{dx}{ch^2x} = \left(1-th^2x\right)dx$
9. $d(cthx) = \frac{-dx}{sh^2x} = \left(cth^2x-1\right)dx$

أما دساتير التحويل من جداء إلى مجموع في الدوال القطعية يتم استنتاجها من جمع و طرح العلاقات التالية:

1. $sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy$
2. $ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy$

أما دساتير التحويل من جداء إلى مجموع في الدوال المثلثية يتم استنتاجها من جمع و طرح العلاقات التالية:

1. $\sin(x \pm y) = sinxcosy \pm cosxsiny$
2. $\cos(x \pm y) = cosxcosy \mp sinxsiny$

والدساتير بعد الاستنتاج هي:

1. $chxchy = \frac{1}{2}[ch(x+y)+ch(x-y)]$
2. $shxshy = \frac{1}{2}[ch(x+y)-ch(x-y)]$
3. $shxchy = \frac{1}{2}[sh(x+y)+ch(x-y)]$
4. $chxshy = \frac{1}{2}[sh(x+y)-ch(x-y)]$
5. $cosxcosy = \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$
6. $sinxsiny = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$
7. $sinxcosy = \frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)]$
8. $cosxsiny = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

جدول الاشتقاق للتوابع الشهيرة

1) $y = a \Rightarrow y' = 0$

2) $y = x^n \Rightarrow y' = n x^{n-1} \quad ; \; n \neq -1$

3) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $y = a^x \Rightarrow y' = a^x . \ln a \quad , a > 0$

5) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

6) $y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

7) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

8) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

9) $y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

10) $y = \operatorname{cotg} x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 + \operatorname{cotg}^2 x$

11) $y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$

12) $y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$

13) $y = \tanh x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

14) $y = \coth x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

15) $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

16) $y = \arccos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

17) $y = \arctan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

18) $y = \operatorname{arc\,cotan} x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

19) $y = \operatorname{arg\,sinh} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

20) $y = \operatorname{arg\,cosh} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

21) $y = \operatorname{arg\,tan} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - x^2} \quad ; \quad |x| < 1$

22) $y = \operatorname{arg\,coth} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - x^2} \quad , \quad |x| > 1$

تغيير المتحولات في التكاملات المضاعفة

① من ديكارتية إلى قطبية :

$$x = r.\cos\theta \quad , \quad y = r.\sin\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r,\theta)rdrd\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

② من ديكارتية إلى اسطوانية :

$$x = r.\cos\theta \quad , \quad y = r.\sin\theta \qquad z = z$$

$$\iiint_D f(x,y.z)dxdydz = \iiint_D f(r,\theta,z)r.drd\theta dz$$

③ من ديكارتية إلى كروية :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x = r.\sin\varphi.\cos\theta \quad ; \quad y = r.\sin\theta.\sin\varphi \quad ; \quad z = r.\cos\varphi$$

$$\iiint_D f(x,y)dxdy = \iiint_D f(r,\theta,\varphi)r^2.\sin\varphi.drd\theta d\varphi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$